

Известно, какие замечательные и разнообразные приложения имеет математический анализ как в самой математике, так и в смежных областях знания. Поэтому сама мысль о связи математического анализа с другими математическими дисциплинами и с потребностями практики должна быть усвоена учащимися при изучении основ анализа уже в школе. Изложенный в данной работе материал лишь немногим связан со школьным курсом. В школе в 10-11 классах изучаются неопределённые и определённые интегралы, практикуется вычисление простейших интегралов и нахождение площади криволинейной трапеции, что составляет лишь малую часть всего интегрального исчисления.

интеграл площадь объем статический момент

## 1. Определённый интеграл

### Площадь криволинейной трапеции

Вычислим площадь плоских фигур при помощи интегралов.

На первом месте рассмотрим в строгом изложении задачу об определении площади **криволинейной трапеции**  $ABCD$  (чертёж 1). Эта фигура ограничена сверху кривой  $DC$ , имеющей уравнение  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  - положительная и непрерывная в промежутке  $[a, b]$  функция; снизу она ограничена отрезком  $AB$  оси  $x$ , а с боков – двумя ординатами  $AD$  и  $BC$  (каждая из которых может свестись к точке).

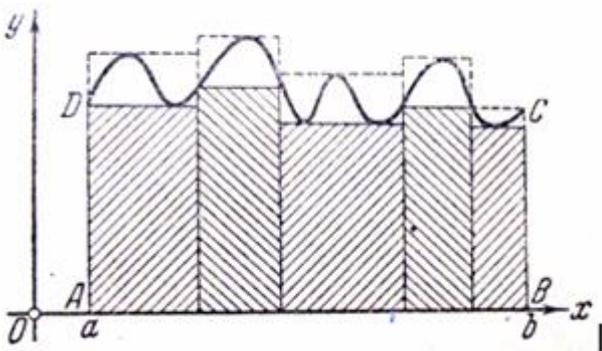


Чертёж 1.

Так как площадь  $P$  рассматриваемой фигуры  $ABCD$  существует, то будем вести речь лишь об её вычислении. С этой целью разобьём промежуток  $[a, b]$  на части, вставив между  $a$  и  $b$  ряд точек  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$ . Обозначив через  $m_i$  и  $M_i$ , соответственно, наибольшее и наименьшее значения функции  $y = f(x)$  в  $i$ -м промежутке ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ), составим суммы (Дарбу)

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_i M_i \Delta x_i$$

Они, очевидно, представляют собой площади ступенчатых фигур, составленных, соответственно, из входящих и выходящих прямоугольников (см. чертёж).

Поэтому  $s < P < S$ . Но при стремлении к нулю наибольшей из разностей  $\Delta x_i$  обе суммы

имеют своим пределом интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , следовательно, ему и равна искомая

$$\text{площадь } P = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Если криволинейная трапеция  $CDFE$  ограничена и снизу и сверху кривыми (чертёж 2), уравнения которых  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), то, рассматривая её как разность двух фигур  $ABFE$  и  $ABDC$ , получим площадь названной трапеции в

$$\text{виде } P = \int_a^b (y_2 - y_1) dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (2)$$

Пусть теперь дан **сектор**  $AOB$  (чертёж 3), ограниченной кривой  $AB$  и двумя радиусами-векторами  $AO$  и  $OB$  (каждый из которых может свестись к точке). При этом кривая  $AB$  задаётся полярным уравнением  $r = g(\theta)$ , где  $g(\theta)$  - положительная непрерывная в промежутке  $[\alpha, \beta]$  функция.

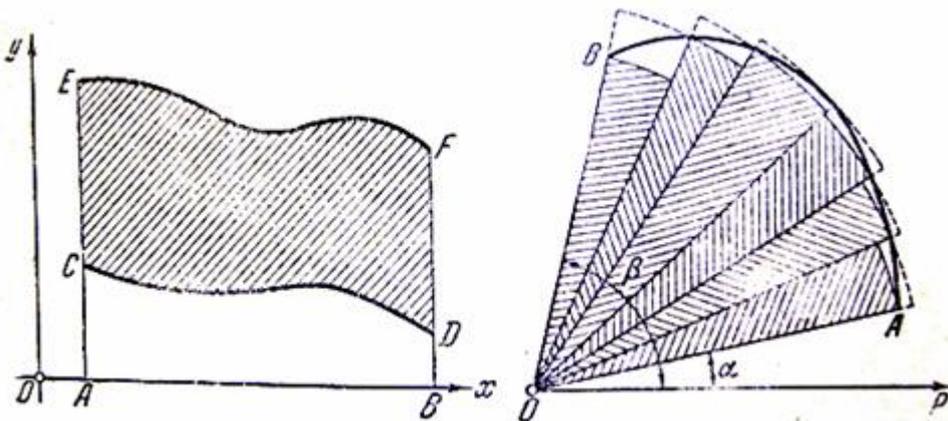
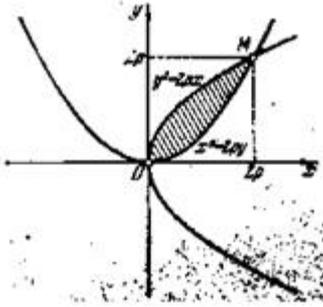


Чертёж 2. Чертёж 3.

Вставив между  $\alpha$  и  $\beta$  (см. чертёж) значения  $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_i < \theta_{i+1} < \dots < \theta_n = \beta$ , проведём соответствующие этим углам радиус-векторы. Если ввести и здесь наименьшее и наибольшее значение функции  $g(\theta)$  в  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ :  $\mu_i$  и  $M_i$ , то круговые секторы, описанные этими радиусами, будут, соответственно, входящими и выходящими для фигуры ( $P$ ). Составим отдельно из выходящих секторов две фигуры,

$$\text{площади которых будут } \sigma = \frac{1}{2} \sum_i \mu_i^2 \Delta \theta_i \quad \text{и} \quad \Sigma = \frac{1}{2} \sum_i M_i^2 \Delta \theta_i$$



В этих суммах  $\sigma$  и  $\Sigma$  легко узнать суммы Дарбу для интеграла  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 d\theta$ ; при стремлении к нулю наибольшей из разностей  $\Delta\theta_i$  обе они имеют пределом этот интеграл. Тогда фигура (P) квадратуема и  $P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 d\theta$ . (3)

Примеры:

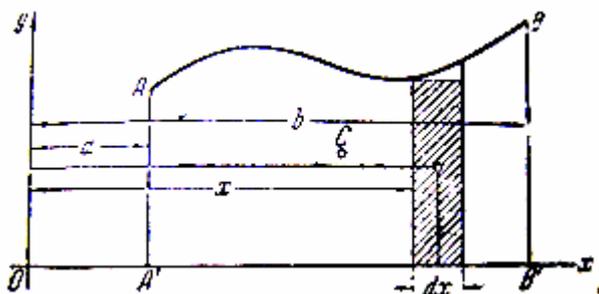
1). Определить площадь фигуры, заключённой между двумя конгруэнтными параболами  $y^2 = 2px$  и  $x^2 = 2py$  (чертёж 4).

Очевидно, нужно воспользоваться формулой (2), полагая там  $y_1 = \frac{x^2}{2p}$ ,  $y_2 = \sqrt{2px}$ .  
чертёж 4.

Для установления промежутка интегрирования решим совместно данные уравнения и найдём абсциссу точки M пересечения обеих парабол, отличной от начала; она равна  $2p$ . Имеем

$$P = \int_0^{2p} \left( \sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \left( \frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p} \right) \Big|_0^{2p} = \frac{4}{3} p^2$$

## 1.6 Нахождение статических моментов и центра тяжести плоской фигуры



Рассмотрим плоскую фигуру  $AA'B'B$  (чертёж 14), ограниченную сверху кривой  $AB$ , которая задана явным уравнением  $y = f(x)$ . Предположим, что вдоль по этой фигуре равномерно распределены массы, так что (чертёж 14) **поверхностная площадь их  $\rho$**

(т.е. масса, приходящаяся на единицу площади) постоянна. Можно принять, что  $\rho=1$ , т.е. что масса любой части нашей фигуры измеряется её площадью. Это всегда и подразумевается, если говорят просто о статических моментах (или о центре тяжести) плоской фигуры.

Чтобы определить статические моменты  $K_x$  и  $K_y$  этой фигуры относительно осей координат, выделим какой-нибудь элемент нашей фигуры в виде бесконечно узкой вертикальной полоски (см. чертёж). Приняв эту полоску приближённо за прямоугольник, видим, что масса её (выражаемая тем же числом, что и площадь) будет  $ydx$ . Для определения соответствующих элементарных моментов  $dK_x$  и  $dK_y$  предположим всю массу полоски сосредоточенной в её центре тяжести (т.е. в центре прямоугольника), что, как известно, не изменяет величины статических моментов.

Полученная материальная точка отстоит от оси  $x$  на расстоянии  $\frac{1}{2}y$ , от оси  $y$  – на расстоянии  $\left(x + \frac{1}{2}dx\right)$ ; последнее выражение можно заменить просто через  $x$ , ибо

отброшенная величина  $\frac{1}{2}dx$ , умноженная на массу  $ydx$ , дала бы бесконечно малую второго порядка. Итак, имеем  $dK_x = \frac{1}{2}y^2 dx$ ,  $dK_y = xy dx$ . Просуммировав эти элементарные моменты, придём к результатам

$$K_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad K_y = \int_a^b xy dx, \quad (14)$$

причём под  $y$  разумеется функция  $f(x)$ .

Как в случае кривой, по этим статическим моментам рассматриваемой фигуры относительно осей координат легко определить теперь и координаты  $\xi$ ,  $\eta$  центра тяжести фигуры. Если через  $P$  обозначить площадь (а следовательно, и массу) фигуры, то по основному свойству центра тяжести

$$P\xi = K_y = \int_a^b xy dx, \quad P\eta = K_x = \int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx, \quad \text{откуда}$$

$$\xi = \frac{K_y}{P} = \frac{\int_a^b xy dx}{P}, \quad \eta = \frac{K_x}{P} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{P}. \quad (15)$$

И в данном случае мы получаем важное геометрическое следствие из формулы для

ординаты  $\eta$  центра тяжести. В самом деле, из этой формулы имеем  $2\pi\eta P = \pi \int_a^b y^2 dx$ .

Правая часть этого равенства выражает объём  $V$  тела, полученного от вращения

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

плоской фигуры  $AA'B'B$  около оси  $x$  (формула 6: ), левая же часть выражает произведение площади этой фигуры  $P$  на  $2\pi\eta$  - длину окружности, описанной центром тяжести фигуры. Отсюда вторая **теорема Гульдина**:

*Объём тела вращения плоской фигуры около не пересекающей её оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры:*  $V = P \cdot 2\pi\eta$ .

Заметим, что формулы (14),(15) распространяются на случай фигуры, ограниченной

$$K_x = \frac{1}{2} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

кривыми и снизу и сверху (чертёж 2). Например, для этого случая

$$K_x = \int_a^b x(y_2 - y_1) dx, \quad (14a)$$

Если вспомнить формулу (2), то легко усмотреть, что теорема Гульдина справедлива также и для этого случая.

Примеры:

1). Найти статические моменты  $dK_x$ ,  $dK_y$  и координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболой  $y^2 = 2px$ , осью  $x$  и ординатой, соответствующей абсциссе  $x$ .

Так как  $y = \sqrt{2px}$ , то по формулам (14)

$$K_x = \frac{1}{2} \cdot 2p \int_0^x x dx = \frac{1}{2} px^2, \quad K_y = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5} x^{\frac{5}{2}}$$

$$P = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

С другой стороны, площадь (по формуле 1)

В таком случае, по формулам (15),  $\xi = \frac{3}{5}x$ ,

Пользуясь значениями  $\xi$  и  $\eta$ , легко найти – по теореме Гульдина – объём тела вращения рассматриваемой фигуры вокруг осей координат или вокруг конечной ординаты. Например, если остановиться на последнем случае, так как расстояние

центра тяжести от оси вращения есть  $\frac{3}{5}x$ , то искомый объём будет  $V = \frac{8}{15} \pi x^2 y$ .

2). Найти центр тяжести фигуры, ограниченной ветвью циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(t - \cos t)$  и осью  $x$ . Воспользовавшись п.1.1. 4) и п.1.2. 2), по теореме Гульдина

легко установить  $\eta = \frac{5}{6}a$ . По симметрии  $\xi = \pi a$ .

## Заключение

В данной работе мы рассмотрели основные виды интегралов и их вычисление, а также их применение к решению прикладных задач. С помощью теории интегралов изложено нахождение площадей, ограниченных различными кривыми, объёмов, ограниченных различными поверхностями, в том числе нахождение площадей и объёмов тел вращения. А также описано нахождение длины дуги заданной кривой на данном отрезке. Представлены некоторые механические приложения для определённого и двойного интегралов: нахождение статических моментов, координат центра тяжести кривой, плоской и объёмной фигур, массы тела. Приведены физические приложения, например, нахождение механической работы, работы силового поля, рассмотрение вопроса о плоском установившемся течении несжимаемой жидкости. В работе приведены некоторые применения криволинейных и поверхностных интегралов.

## Литература

1. Архипов Г.И. Садовничий В.А. Чубариков В.Н. «Лекции по математическому анализу», 1999.
2. Виноградова И.А. Олехник С.Н. Садовничий В.А. «Задачи и упражнения по математическому анализу», Часть 1, 1988.
3. Виноградова И.А. Олехник С.Н. Садовничий В.А. «Задачи и упражнения по математическому анализу», Часть 2, 1991.
4. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», 1997.
5. Запорожец Г.И. «Руководство к решению задач по математическому анализу», 1966.
6. Зорич В.А. «Математический анализ», Часть 1, 1997.
7. Зорич В.А. «Математический анализ», Часть 2, 1984.
8. Матвеев Н.М. «Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений», 1967.
9. Нахман А.Д., «Интегралы функций одной и нескольких переменных. Дифференциальные уравнения». Учебно-методические разработки. Тамбов. Издательство ТГТУ, 2006.
10. Никольский С.М. «Курс математического анализа», Часть 1, 2, 1983.
11. Рудин У. «Основы математического анализа», 1966.
12. Шведов И. «Математический анализ. Часть 1. Функции одной переменной».
13. Шведов И. «Математический анализ. Часть 2. Интегральное исчисление функций многих переменных ».

14. Шилов Г.Е. «Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных)», Части 1-2, 1972.

15. Шилов Г.Е. «Математический анализ (функции одного переменного)», Часть 3, 1972.