

Милёхина Татьяна Викторовна,
учитель математики,
МБОУ СОШ № 16,
г. Ишимбай

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЗАДАЧ

Опыт работы в школе показывает, что решение одной и той же задачи различными способами способствует развитию логического мышления, сообразительности, критичности, рационализации действий, нахождению правильного пути разрешения различных ситуаций.

Решая одну и ту же задачу различными способами, можно более эффективно осознать содержание того или иного понятия, темы, раздела и всего курса планиметрии.

В зависимости от содержания задачи, решая её различными способами, можно намного лучше понять специфику того или иного способа, его преимущество и недостатки.

Большинство задач по планиметрии допускают различные способы решения.

Было бы целесообразным включить в школьные учебники задачи, решаемые различными способами или на одном уровне, или в пределах одной темы, или на протяжении учебного года, целого курса.

В методике обучения решению задач различными способами можно выделить несколько этапов:

а) указание теоремы, определение понятия, правила, дополнительного построения, который надо использовать при нахождении пути решения задачи данным способом;

б) указание теоремы (темы раздела), которая используется при решении задачи данным способом;

- в) указание самого способа решения;
- г) предложить решить задачу без всякого указания.

Это даёт возможность учащихся класса разделить условно на отдельные группы:

- 1) Учащиеся, нуждающиеся в конкретных указаниях (теоремы, определения понятия, правила, дополнительные построения) для решения задачи;
- 2) Учащиеся, нуждающиеся в общих указаниях (тема, раздел, метод решения) для решения задачи;
- 3) Учащиеся, не нуждающиеся в указаниях при решении задачи.

Систематическое включение учеников в поиск различных способов решения одной и той же задачи даёт возможность переходить им из одной группы в другую, т. е. способствует развитию их творческого мышления.

Таким образом, методика развития творческого мышления учащихся, на мой взгляд, прежде всего направлена на обучение детей решению одной и той же задачи различными способами.

Рассмотрим эту методику на примере некоторых задач.

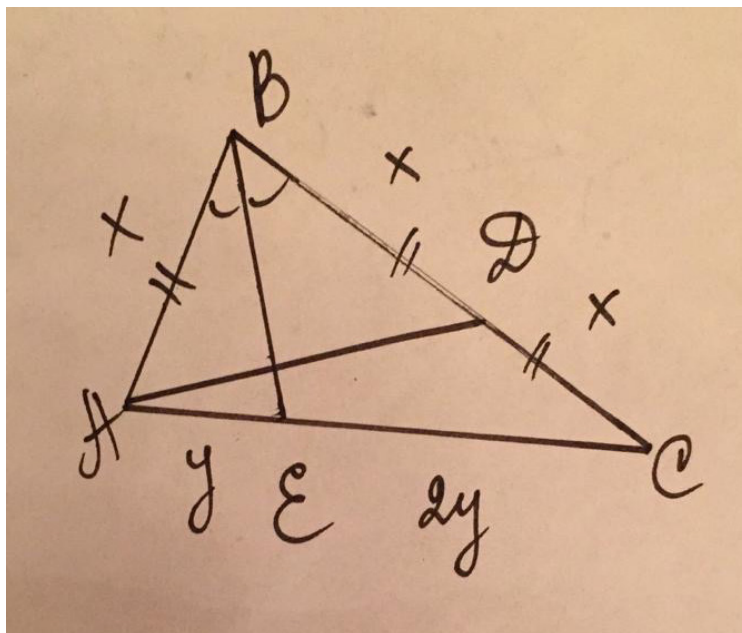
Задача №1.

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найдите стороны треугольника ABC.

1 способ.

В треугольнике ABC $AB=BE=4$. BE перпендикулярна AD, BE-биссектриса. (ребята, а с каким треугольником мы имеем дело? На этот вопрос могут ответить даже не очень сильные ученики). Следовательно, $\triangle ABC$ равнобедренный. Значит ВО-медиана, $AO=OD=2$.

(На следующем этапе вспоминаем свойство биссектрисы. Подключаем более сообразительных ребят.)



По свойству биссектрисы $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{AE}{EC}$. Пусть $AE=y$. Тогда $EC=2y$.

(Выполнение дополнительных построений-задача не из лёгких. Работает ум, сообразительность, фантазия. Спасают самые умелые или помогает учитель).

Проведём DK параллельно BE , $K \in AC$.

(найдите отрезки, которые являются средними линиями каких-то треугольников. Это не сложный вопрос. Работают все).

$\triangle BEC$. DK -средняя линия. $DK = \frac{1}{2}BE = 2$.

$\triangle AOE$, OE -средняя линия, $OE = 1$.

(Ну а теперь любимая теорема Пифагора).

$\triangle AOE$. $AE = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$, $AC = 3\sqrt{5}$.

$BO = 4 - 1 = 3$.

$\triangle ABO$. $AB = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

$BC = 2\sqrt{13}$.

Ответ. $\sqrt{13}, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{5}$.

2 способ.

В треугольнике ABC $AB=BE=4$. BE перпендикулярна AD , BE -биссектриса. (ребята, а с каким треугольником мы имеем дело? На этот вопрос

могут ответить даже не очень сильные ученики). Следовательно, $\triangle ABC$ равнобедренный. Значит BO -медиана, $AO=OD=2$.

Выполним дополнительные построения, связанные с продолжением медианы.

Продолжим медиану AD . $AD=DK$. (Ребята, определите вид четырёхугольника $ABKC$.)

Так как диагонали точкой пересечения делятся пополам, то $ABKC$ -параллелограмм.

(Какие свойства параллелограмма вы знаете?...)

Значит $AC=BK=3y$.

(Найдите подобные треугольники на рисунке).

$\triangle AOE$ подобен $\triangle BDK$ по первому признаку подобия, так как угол CAK равен углу AKB , угол ADC равен углу BDK . Следовательно, $\frac{AE}{BK} = \frac{OE}{BO} = \frac{1}{3}$. $BE=4$.
Значит $OE=1$, $BO=3$.

$\triangle AOE$. $AE=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, $AC=3\sqrt{5}$.

$BO=4-1=3$.

$\triangle ABO$. $AB=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

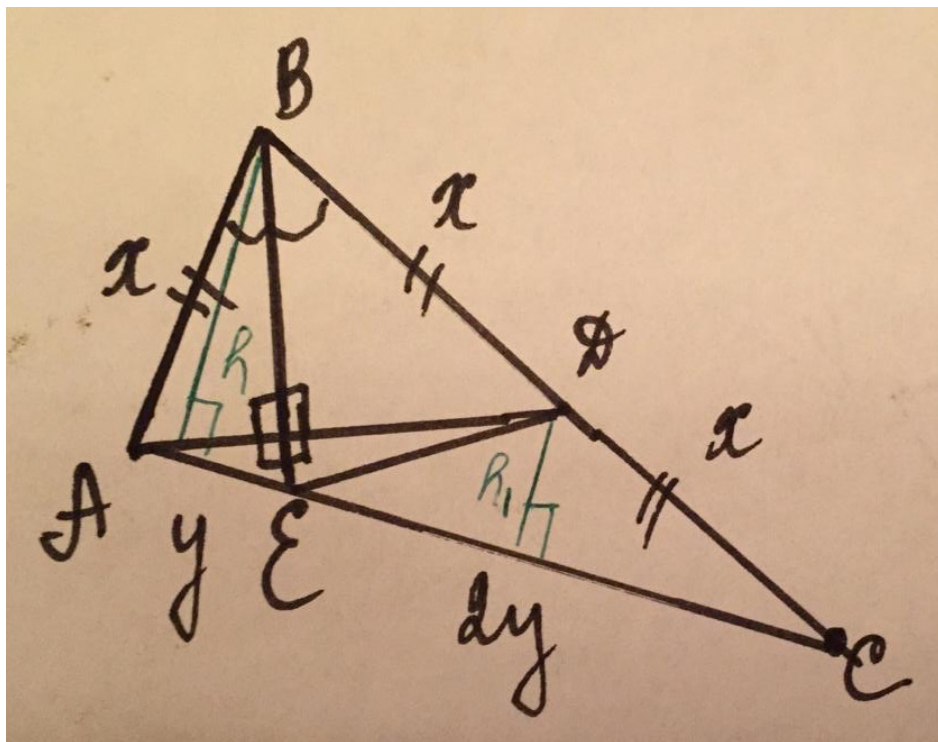
$BC=2\sqrt{13}$.

Ответ. $\sqrt{13}$, $2\sqrt{13}$, $3\sqrt{5}$.

3 способ.

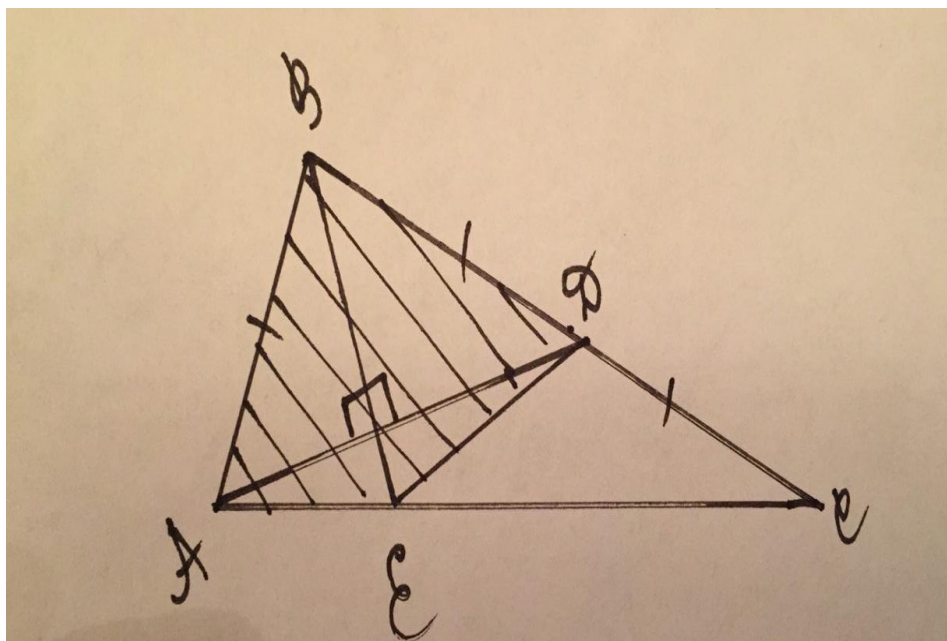
Этот способ показывает как работает метод площадей.

Пусть h -высота треугольника ABC , а h_1 -высота треугольника EDC .



Несложно определить площадь четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями. $S_{ABDC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

(Ребята, а как высота h относится к высоте h_1 ?)



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot h = S_{ABDE} + S_{\triangle EDC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot AC \cdot \frac{1}{2} \cdot h = 8 + \frac{1}{6} \cdot AC \cdot h.$$

$$\frac{1}{2} AC \cdot h - \frac{1}{6} AC \cdot h = 8,$$

$$AC \cdot h = 24$$

$$S_{\triangle ABC} = 12$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 6$$

(Как бы вы, ребята, искали площадь этого треугольника, используя основание AD?)

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot BO = 6,$$

значит $BO=3$, $OE=1$.

$$\triangle AOE. AE = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}, AC = 3\sqrt{5}.$$

$$BO = 4 - 1 = 3.$$

$$\triangle ABO. AB = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

$$BC = 2\sqrt{13}.$$

$$\text{Ответ. } \sqrt{13}, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{5}.$$

4 способ.

Есть в классе и такие ребята, которые просто хорошо знают формулы. Этот способ для них.

По условию задачи АД-медиана, следовательно, $BD=DC$.

В $\triangle ABD$ биссектриса перпендикулярна основанию, следовательно, по признаку равнобедренного треугольника, этот треугольник является равнобедренным.

$$AB=BD.$$

То есть $AB=BD=DC$. Пусть длина этих отрезков равна a . По свойству биссектрисы $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$

$$\text{Пусть } AE=x, \text{ тогда } EC=2x, AC=2x, AC=3x.$$

Воспользуемся формулами для нахождения биссектрисы и медианы.

$$4AD^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2,$$

$$4 \cdot 4^2 = 2a^2 + 2 \cdot (3x)^2 - (2a)^2$$

$$64 = 2a^2 + 18x^2 - 4a^2$$

$$9x^2 - a^2 = 32$$

Биссектриса.

$$BE^2 = AB \cdot BC - AE \cdot EC$$

$$16 = a \cdot 2a - x \cdot 2x$$

$$a^2 - x^2 = 8$$

Получим систему уравнений.

$$a^2 - x^2 = 8$$

$$9x^2 - a^2 = 32$$

Решив её, находим $x = \sqrt{5}$, $a = \sqrt{13}$.

$$AC = 3\sqrt{5}.$$

$$BC = 2\sqrt{13}.$$

$$\text{Ответ. } \sqrt{13}, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{5}.$$

Задача №2.

Точки М и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 5 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки М и N и касающейся луча АВ, если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

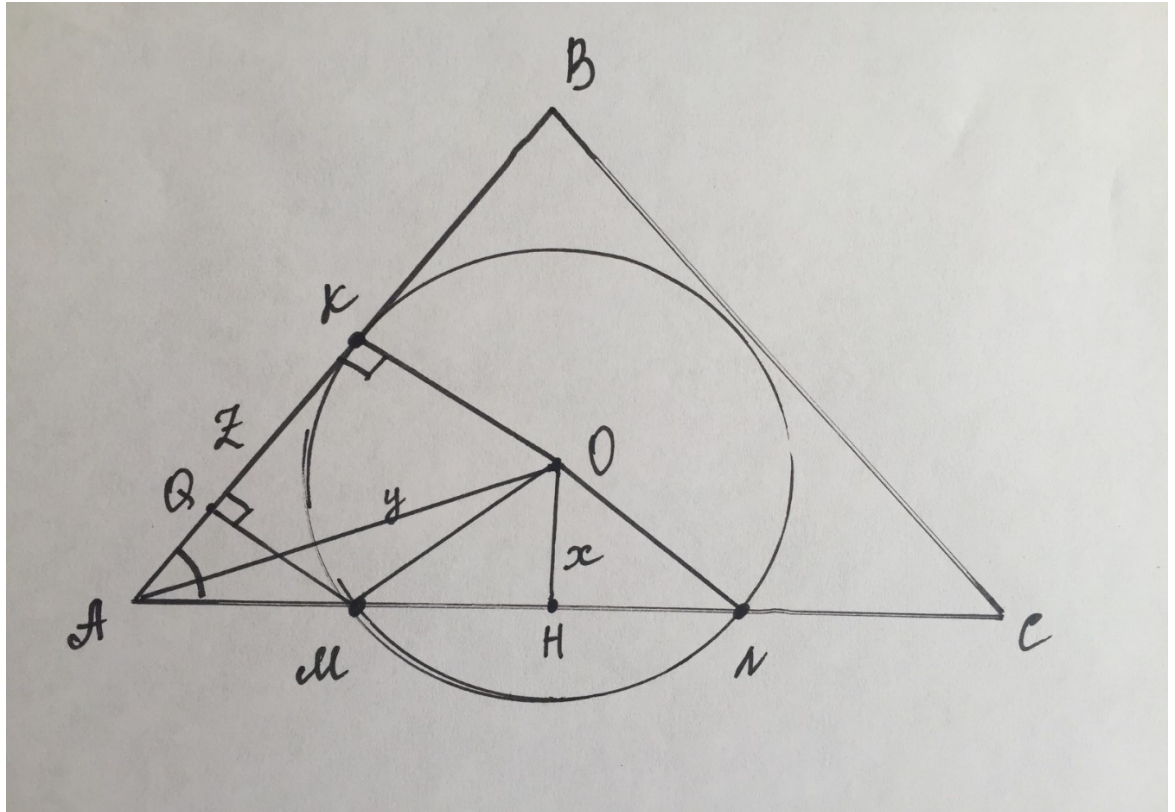
1 способ.

Этим способом задачу решают те ученики, у которых не большой запас знаний. Для того, чтобы решить задачу этим способом, необходимо знать теорему Пифагора и определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника.

Пусть точка О-центр описанной окружности вокруг треугольника KMN.

$\triangle MON$ – равнобедренный, так как ОК и ON – радиусы окружности.

Проведём в этом треугольнике высоту ОН.



$$MN=15-4=11, MH=HN=11/2.$$

Пусть $OH=x$.

$$\triangle MOH. \text{ По теореме Пифагора } x^2 + \frac{11}{2} = R^2.$$

Пусть $OA=y$.

$$\triangle AOH. \text{ По теореме Пифагора } x^2 + \left(4 + \frac{11}{2}\right)^2 = y^2.$$

$\triangle AKO$. Опять по теореме Пифагора получаем третье уравнение.

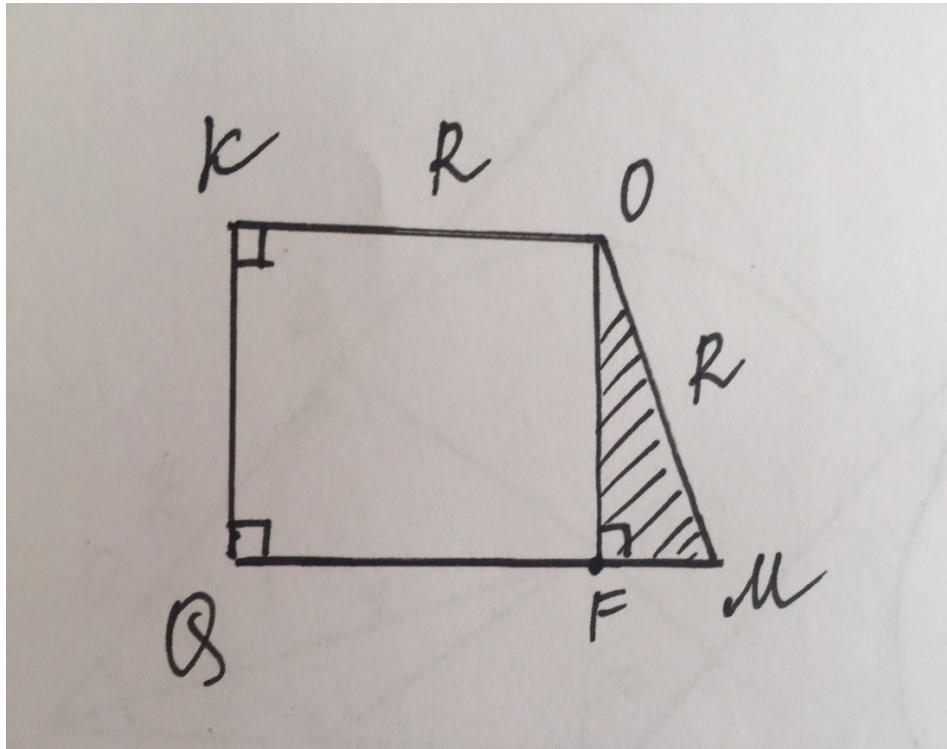
$$R^2 + z^2 = y^2.$$

Выполним алгебраические преобразования.

$$y^2 - R^2 = \left(\frac{8+11^2}{2}\right) - \left(\frac{11}{2}\right) = \left(\frac{19}{2}\right)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{19}{2} - \frac{11}{2}\right) \cdot \left(\frac{19}{2} + \frac{11}{2}\right) = 4 \cdot 15 = 60,$$

$$z^2 = y^2 - R^2 = 60 \Rightarrow z = 2\sqrt{15} = AK.$$

Проведём MQ перпендикулярно AB .



QKOM- трапеция.

$$\cos \angle A = \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{AQ}{4} \Rightarrow AQ = \sqrt{15} \Rightarrow QK = 2\sqrt{15} - \sqrt{15} = \sqrt{15}.$$

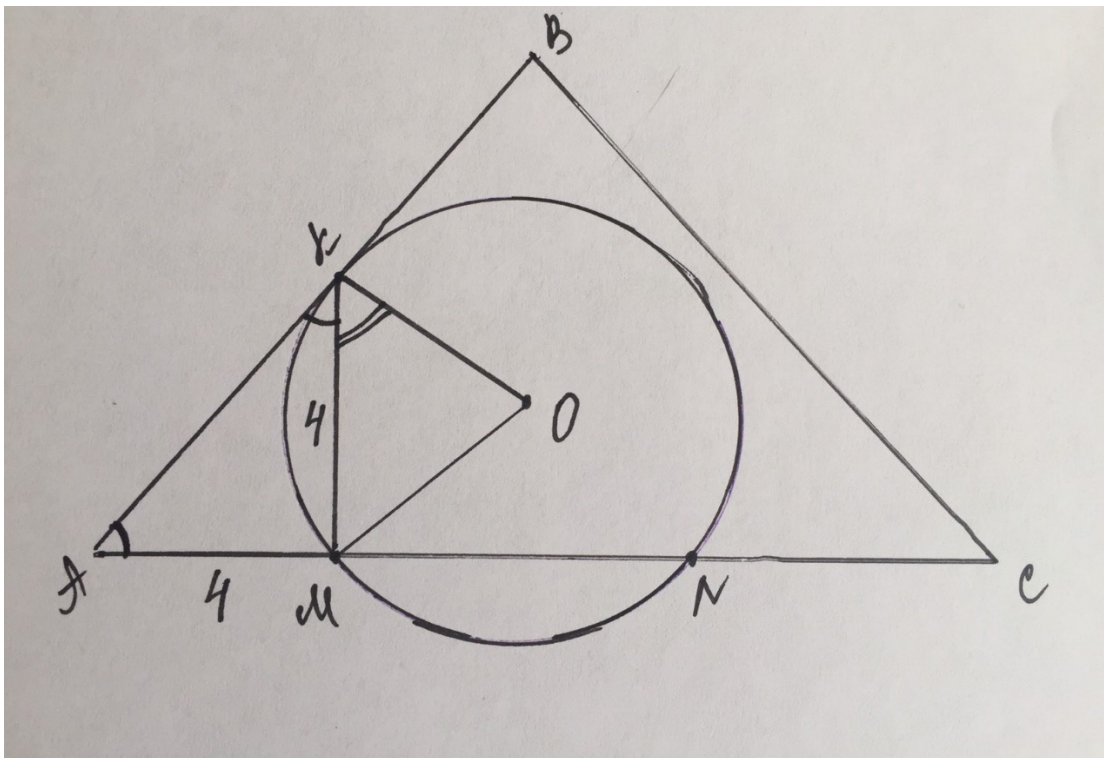
$$QM = \sqrt{16-15} = 1, (1-R)^2 + 15 = R^2, 1-2R+15=0, 16=2R, R=8.$$

Ответ. 8.

2 способ.

$$AM \cdot AN = AK^2, 4 \cdot 15 = 60 = AK^2, AK = 2\sqrt{15}.$$

Вспоминаем теорему косинусов. Рассмотрим треугольник АКМ.



$$KM^2 = 60 + 16 - 2 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 76 - 4 \cdot 15 = 16, \quad KM = 4.$$

Следовательно, треугольник АКМ-равнобедренный. По свойству равнобедренного треугольника $\angle KAM = \angle MAK$. Так как АВ перпендикулярна ОК, то $\angle MOK = 90^\circ - \angle A$, $\sin(90^\circ - \angle AKM) = \cos \angle AKM = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}$.

Треугольник КОМ- равнобедренный. Опущенная из вершины О-высота, будет и медианой.

$$\cos \angle AKM = \frac{2}{R}, R = \frac{2}{1/4} = 8$$

Ответ. 8.

3 способ.

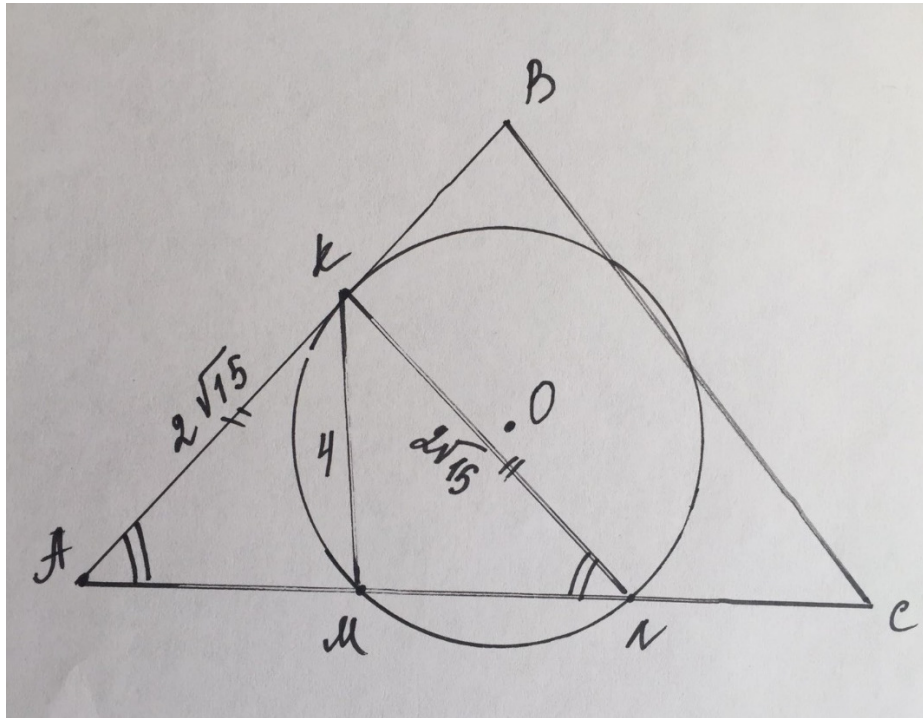
$$AM \cdot AN = AK^2, 4 \cdot 15 = 60 = AK^2, AK = 2\sqrt{15}.$$

По теореме косинусов найдём сторону KN треугольника AKN.

$$KN^2 = 60 + 225 - 2 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 60 + 225 - 225 \cdot 2 = 60,$$

$$KN = 2\sqrt{15}.$$

Заметим, что треугольник AKN – равнобедренный.



Следовательно $\angle KAN = \angle KNA$,

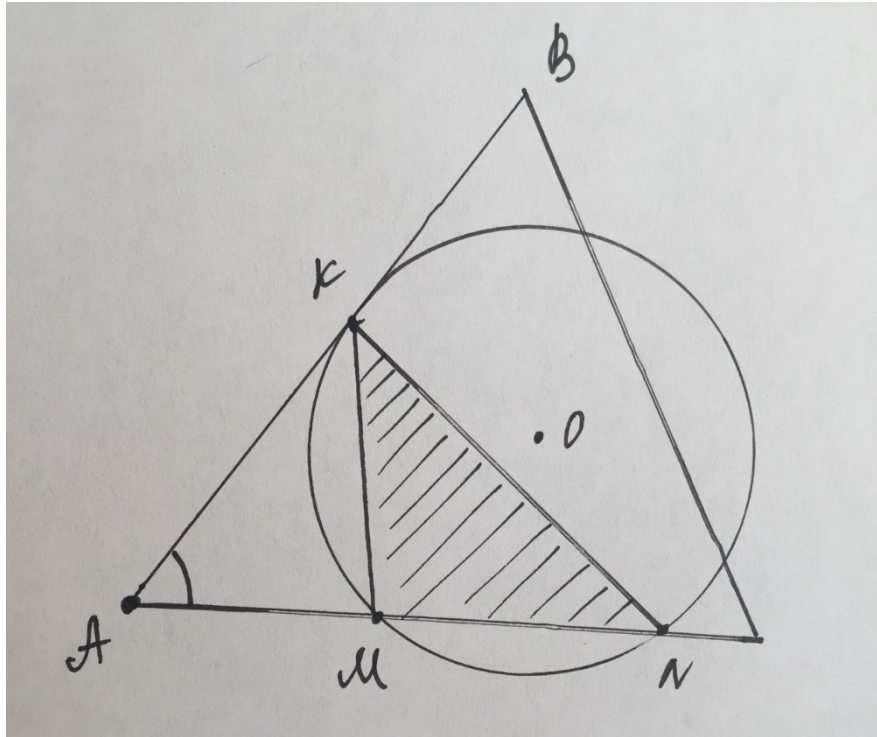
$$\sin \angle KAN = \sin \angle KNA = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}.$$

Вспоминаем теорему синусов. $\triangle KMN$. $\frac{KM}{\sin \angle KNM} = \frac{4}{1/4} = 2 \cdot R$, $R = 8$.

Ответ. 8.

Обращаем внимание ребят на краткость этого способа решения.

4 способ.



$$AM \cdot AN = AK^2, 4 \cdot 15 = 60 = AK^2, AK = 2\sqrt{15}.$$

По теореме косинусов найдём стороны KN и KM треугольника AKN.

$$KN^2 = 60 + 225 - 2 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 60 + 225 - 225 \cdot 2 = 60,$$

$$KN = 2\sqrt{15}.$$

$$KM^2 = 60 + 16 - 2 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 76 - 4 \cdot 15 = 16, KM = 4.$$

$$MN = 15 - 4 = 11, MH = HN = 11/2.$$

В треугольнике KMN, мы знаем все стороны. Можем найти площадь по формуле Герона. Воспользовавшись формулой, связывающей площадь треугольника с радиусом описанной окружности, нетрудно найти радиус описанной окружности.

$$p = \sqrt{15 + 2 + \frac{11}{2}},$$

$$S = \sqrt{(\sqrt{15} + 7,5 - 4) \cdot (\sqrt{15} + 7,5 - \frac{11}{2}) \cdot (\sqrt{15} + 7,5 - 2\sqrt{15}) \cdot (\sqrt{15} + 7,5)}$$

$$S = \sqrt{(7,5 - \sqrt{15}) \cdot (7,5 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{15} - 3,5) \cdot (\sqrt{15} + 3,5)} = \sqrt{\left(\frac{225}{4} - 15\right) \cdot \left(15 - \frac{49}{4}\right)},$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{225 - 60}{4}\right) \cdot \left(\frac{60 - 49}{4}\right)} = \sqrt{\frac{165 \cdot 11}{16}} = \frac{11}{4} \sqrt{15}$$

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad R = \frac{2\sqrt{15} \cdot 4 \cdot 11}{4 \cdot 11/4 \cdot \sqrt{15}} = 8$$

Ответ. 8.

5 способ.

Этот способ подобен предыдущему, но можно заметить, что площадь треугольника находится проще. Треугольник АKN –равнобедренный. Из него можно найти высоту, проведённую к основанию. Обозначим её h .

$$h = \sqrt{60 - \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{11}{4} \sqrt{15}$$

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad R = \frac{2\sqrt{15} \cdot 4 \cdot 11}{4 \cdot 11/4 \cdot \sqrt{15}} = 8$$

Ответ. 8.

Ребята, посмотрите сколько теоретического материала мы повторили при решении этих задач! И вы сможете с этим справиться!

Важный путь развития творческого мышления учеников в процессе решения геометрических задач связан с работой по завершению решения задачи. Здесь имеется в виду подведение итогов решения одной или нескольких связанных между собой задач. Часто бывает полезно выяснить, как было найдено решение: что именно помогло его найти, как иначе можно было бы решить эту задачу, обратную решенной задаче и как её решить; можно ли установить логические связи между решенными задачами и т.д.